Department of Computer Science
University of Cyprus

EPL342 –Databases

Lecture 22: Functional Dependencies and Normalization

Functional Dependencies

(Chapter 10.2, Elmasri-Navathe 5ED)

Διδάσκων: Παναγιώτης Ανδρέου

http://www.cs.ucy.ac.cy/courses/EPL342

Περιεχόμενο Διάλεξης

- **Συναρτησιακές Εξαρτήσεις** (Functional Dependencies FD)
- **Κανόνες Συμπερασμού για Συναρτησιακές** Εξαρτήσεις(Inference Rules - IR)
  - Τα αξιώματα Armstrong
  - Αποδείξεις με χρήση γνωστών κανόνων
- **Ορισμοί Συναρτησιακών Εξαρτήσεων (FD):**
  - Κλειστότητες F^+ και X^+ (Closure)
  - Ισοδυναμία $F^+=G^+$ (Equivalence)
  - Κάλυψη FD (Cover)
  - Ελάχιστη Κάλυψη FD (Minimal Cover)

Συναρτησιακές Εξαρτήσεις – ΣΕ (Functional Dependencies - FD)

- Στην προηγούμενη διάλεξη καλύψαμε με άτυπο τρόπο κάποιες γενικές **κατευθύνσεις** στο **σχεδιασμό** ενός **καλού σχεσιακού σχήματος**.
- Σε αυτή την διάλεξη θα μελετήσουμε την έννοια των **Συναρτησιακών Εξαρτήσεων (Functional Dependencies, FD)**
- Με χρήση των FD θα μπορέσουμε να αποτιμήσουμε, στην ερχόμενη διάλεξη, με τυπικό τρόπο την **χρηστότητα (goodness)** ενός σχεσιακού σχήματος.
  - Οι Συναρτησιακές Εξαρτήσεις αποτελούν το βασικό υπόβαθρο στο Relational Design Theory

Παραδείγματα FDs

Παραδείγματα Συναρτησιακών Εξαρτήσεων:

- Το **SSN** προσδιορίζει το όνομα του **Employee**.
  - SSN → ENAME
- Το **PNUMBER** προσδιορίζει το **Project Name** και **Location**
  - PNUMBER → {PNAME, PLOCATION}
- Το **SSN** και το **PNumber** προσδιορίζει τον αριθμό ορών που εργάζεται ένας employee σε ένα project.
  - {SSN, PNUMBER} → HOURS
- Φαινομενικά, το **αριστερό μέλος** ενός FDs είναι κάποιο πρωτεύων κλειδί. Στην πραγματικότητα, μπορεί να είναι οποιοδήποτε/α key ή non-key γνώρισμα/τα, π.χ.,
  - Credits → Status
  - NumberGrade → LetterGrade
  - CarModel → Manfacturer
  - *{Author, Title} → Publication Date*

- Τα **FDs** ορίζουν **εξαρτήσεις** μεταξύ γνωρισμάτων, οι οποίες προκύπτουν ρητά από τις προδιαγραφές, και οι οποίες οδηγούν σε **επανάληψη (redundancy)** δεδομένων.

Παραδείγματα FDs

- Η συναρτησιακή εξάρτηση **TOWN → ZIP** στο ακόλουθο σχήμα προκαλεί την επανάληψη πληροφορίας (redundancy)
  - Π.χ., θεωρώντας ότι οι διευθύνσεις στην ίδια περιοχή έχουν το ίδιο ταχυδρομικό κώδικα (zip)

SSN	*Name*	*Town*	*Zip*
1234	Joe	Stony Brook	11790
4321	Mary	Stony Brook	11790
5454	Tom	Stony Brook	11790
	……………………		

Redundancy

Κατ' επέκταση, η πιο πάνω **επανάληψη** οδηγεί σε ανωμαλίες **εισαγωγών**, **διαγραφών** και **ενημερώσεων** για αυτό η επανάληψη δεδομένων πρέπει να **ελαχιστοποιηθεί**!

Συναρτησιακές Εξαρτήσεις FDs

- Μια **Συναρτησιακή Εξάρτηση** είναι ένας **περιορισμός** μεταξύ δυο **ομάδων γνωρισμάτων** μιας βάσης δεδομένων.
  - Κάντε την παραδοχή ότι όλα τα γνωρίσματα μιας βάσης αποθηκεύονται σε ένα καθολικό πίνακα $\mathbf{R(A_1, A_2,\ldots, A_n)}$
- Έστω ότι $\mathbf{R=(A_1, A_2,\ldots, A_n)}$ και ότι $\mathbf{X \subseteq R}$ και $\mathbf{Y \subseteq R}$, τότε η Συναρτησιακή Εξάρτηση $\mathbf{X \rightarrow Y}$, υποδηλώνει ότι μια ανάθεση τιμών στο σύνολο X προσδιορίζει μοναδικά το σύνολο Y.
  - Δηλαδή, εάν **t1[X]=t2[X]**, *τότε* **t1[Y]=t2[Y]**
  - Επομένως είναι μια γενίκευση της έννοιας του κλειδιού.
- Θα **αναφερόμαστε** στα FDs ως ακολούθως:
  - Το **X** **προσδιορίζει** συναρτησιακά το **Y**
  - Το **Y** είναι συναρτησιακά **εξαρτώμενο** από το **X**

Παραδείγματα FDs

- Τα **FDs** είναι ένας επιπλέον **μηχανισμός χαρακτηρισμού** των περιορισμών αναφορικής ακεραιότητας (IC) μεταξύ **γνωρισμάτων** μιας σχέσης
  - Ωστόσο τα FDs **ΔΕΝ** δηλώνονται ρητά σε μια βάση, **απλά** χρησιμοποιούνται ως **εργαλείο** για **Εκλέπτυνση** του Σχήματος κατά την φάση της σχεδίασης.
- Για τα FDs υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις:
  - **A) ΙΣΧΥΕΙ για ΚΑΘΕ στιγμιότυπο βάσης.** π.χ., SSN → Teacher (γενικά όλα τα FDs με αριστερό μέλος KEY ισχύουν ΠΑΝΤΑ.)
  - **B) ΜΠΟΡΕΙ να Ισχύει (σε ΚΑΠΟΙΟ στιγμιότυπο βάσης:** π.χ., στο πιο κάτω στιγμιότυπο τυγχάνει να ισχύει το TEXT → COURSE
  - **C) ΔΕΝ Ισχύει σε ΚΑΠΟΙΟ στιγμιότυπο βάσης:** Αρκεί να βρείτε ένα αντιπαράδειγμα π.χ., πιο κάτω TEACHER -/→ COURSE.

TEACH

Teacher	Course	Text
Smith	Data Structures	Bartram
Smith	Data Management	Martin
Hall	Compilers	Hoffman
Brown	Data Structures	Horowitz

Παραδείγματα FDs

Βρείτε ποια FDs **ισχύουν** στο ακόλουθο στιγμιότυπο βάσης (ή ποια **ΜΠΟΡΕΙ να ισχύουν** στην ακόλουθη βάση)

	A	B	C	D
1)	a1	b1	c1	d1
2)	a1	b2	c1	d2
3)	a2	b2	c2	d2
4)	a2	b2	c2	d3
5)	a3	b3	c2	d4

- A → C; **YES (Maybe)**
- C → A; **NO (line 5)**
- B → C; **NO (line 3)**
- D → B; **YES(Maybe)**
- AB → D; **NO (line 4)**

Κανόνες Συμπερασμού για FDs (Inference Rules, IR)

- Με βάση ένα σύνολο FDs **F και τους κανόνες του Armstrong**, μπορούμε να **συμπεράνουμε (infer)** επιπλέον FDs τα οποία ισχύουν όποτε ισχύει το **F**.
  - Π.χ., Από το FD={SSN → Dno, Dno->Dname} μπορούμε να συμπεράνουμε, με τους κανόνες Armstrong, ότι SSN → Dname.

- **Οι Κανόνες Συμπερασμού (IR) Armstrong :**
  - **IR1** (**Ανακλαστικός, Reflexive**): **Εάν X ⊇ Y τότε X → Y**
    - π.χ., Εάν **{ssn,name}⊇name** τότε {**ssn,name**} → **name**
    - Είναι τετριμμένος κανόνας.
  - **IR2** (**Επαυξητικός, Augmentation**): **Εάν X→Y τότε XZ→YZ**
    - π.χ., Εάν **ssn→name** τότε **{ssn,age}** → **{name,age}**
    - * Το **XZ** σημαίνει **X U Z**, επίσης Εάν **X→Y** τότε **XZ→Y**
  - **IR3 (Μεταβατικός, Transitive**) **Εάν X→Y και Y→Z τότε X→Z**
    - π.χ., Εάν **ssn→Dno** και **Dno→Dname** τότε **ssn→Dname**

Κανόνες Συμπερασμού για FDs (Inference Rules, IR)

- Οι κανόνες Armstrong (IR1, IR2, IR3) είναι **βάσιμοι (sound)** και **πλήρεις (complete).**
  - **Βάσιμοι (Sound):** Δηλαδή είναι ορθοί για κάθε στιγμιότυπο εισόδου (δείτε αποδείξεις ορθότητας στο βιβλίο)
  - **Πλήρεις (Complete):** Με βάσει αυτούς μπορούμε να συνάγουμε ΟΛΟΥΣ τους άλλους κανόνες που μπορεί να συναχθούν.
- Στην επόμενη διαφάνεια δείχνουμε μερικούς άλλους Κανόνες IR, τους οποίους μπορούμε να συνάγουμε από τα αξιώματα Armstrong

Κανόνες Συμπερασμού για FDs (Inference Rules, IR)

Κανόνες που Συνάγονται από τα Αξιώματα Armstrong

- **IR4 Διάσπαση (Decomposition):**

  Εάν **X** $\rightarrow$ **YZ** τότε **X** $\rightarrow$ **Y** και **X** $\rightarrow$ **Z**

  *π.χ., Εάν **ssn**→**{name, age}** τότε **ssn**→**name** και **ssn** → **age***

  Προσοχή: Μόνο το δεξί μέλος διασπάται όχι το αριστερό

  *π.χ., Εάν {ssn,name}→age ΔΕΝ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ότι **name**→**age***

- **IR5 Ένωση (Union), [Αντίθετο της διάσπασης]:**

  Εάν **X** $\rightarrow$ **Y** και **X** $\rightarrow$ **Z**, τότε **X** $\rightarrow$ **YZ**

  *π.χ., Εάν **ssn->name** και **ssn->age** τότε **ssn->{name,age}***

  Προσοχή: X → A και Y → B ΔΕΝ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ότι XY→AB

- **IR6 Ψευδομετάβαση (Pseudotransitivity):**

  Εάν **X** $\rightarrow$ **Y** και **WY** $\rightarrow$ **Z**, τότε **WX** $\rightarrow$ **Z**

  *π.χ., Εάν **isbn**→**title** και {**author, title**}→**pubdate** τότε {**author, isbn**}→**pubdate***

Κανόνες Συμπερασμού (IR) για FDs (Αποδείξεις IR4-IR6)

- Οι κανόνες συμπερασμού **IR1-IR3** αποδεικνύονται με **μαθηματικές αποδείξεις** (δείτε βιβλίο) ενώ οι **κανόνες IR4-IR6** και άλλες ασκήσεις με τη **χρήση** των **IR1-IR3**.

- **Απόδειξη IR4 (Διάσπαση): Εάν X→YZ |= X → Y ∧ X → Z**
  1) **X**→YZ (δεδομένο)
  2) YZ→**Y** (IR1:ανακλαστική, το YZ⊇Y), αντίστοιχα και YZ→Z από YZ⊇Z
  3) X→**Y** (IR3:μετάβαση 1-2), αντίστοιχα με (2) YZ→Z και (1) έχουμε X→Z

- **Απόδειξη IR5 (Ένωση): (X → Y ∧ X → Z) |= X → YZ**
  1) **X**→Y (δεδομένο)
  2) X→Z (δεδομένο)
  3) XX →**XY** (IR2:επαύξηση 1 με X)
  4) X→**XY** (απλοποίηση 3, XX = X)
  5) **XY**→YZ (IR2:επαύξηση 2 με Y)
  6) **X**→**YZ** (IR3: μετάβαση 4-5)

Απόδειξη IR6 (Ψευδομετάβαση):
X → Y ∧ WY → Z |= WX → Z
1) X→Y (δεδομένο)
2) WY→**Z** (δεδομένο)
3) **WX**→WY (IR2:επαύξηση 1 με W)
4) **WX**→**Z** (IR3: μετάβαση 2-3)

Ορισμοί Συναρτησιακών Εξαρτήσεων (**Κλειστότητες F^+ και X^+**)

- **F^+: Κλειστότητα Συνόλου FD F:** Το σύνολο όλων των συναρτησιακών εξαρτήσεων που προσδιορίζεται από το F (με επαναληπτική εφαρμογή των κανόνων IR1-IR6)
  - π.χ., Εάν **$F=\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$** τότε **$F^+=\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \rightarrow C\}$**
- **X^+: Κλειστότητα Γνωρίσματος X:** Το σύνολο όλων των γνωρισμάτων που εξαρτώνται συναρτησιακά από το X
  - π.χ., Εάν F=**$\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$** τότε **$A^+=\{A,B,C\}$**, **$B^+=\{B,C\}$** και **$C^+=\{C\}$**

Αλγόριθμος Υπολογισμού του X^+:

1) $X^+ := X$
2) repeat
3) old_X^+ := X^+
4) for each FD **$Y \rightarrow Z$** in **F** do
5) if $Y \subseteq X^+$ then $X^+ := X^+ \cup Z$
6) until (old_X^+ == X^+)

Step-by-Step Execution:

1) $A^+ :=\{A\}$
3) old_$A^+ :=\{A\}$
4-5) $A \subseteq A^+$, so $A^+:=\{A,B\}$
4-5) $B \subseteq A^+$, so $A^+:=\{A,B,C\}$
…(after next iteration)…
6) Now A^+==old_A^+ so quit

- **X^+** είναι χρήσιμο εάν θέλουμε να βρούμε κατά πόσο μια FD **$X \rightarrow Y$** ανήκει σε κάποιο **F^+** (π.χ., βρες εάν το $A \rightarrow C$ είναι στο F^+ **$C \in A^+$**, άρα είναι!
- Εάν το **X^+** περιέχει όλα τα γνωρίσματα μιας σχέσης τότε το **X** είναι Candidate Key.

Ορισμοί Συναρτησιακών Εξαρτήσεων (**Κλειστότητες F^+ και X^+**)

Παράδειγμα Υπολογισμού του X^+

F= { SSN $\rightarrow$ Ename,

Pnumber $\rightarrow$ {Pname, Plocation}

{Ssn, Pnumber} $\rightarrow$ Hours }

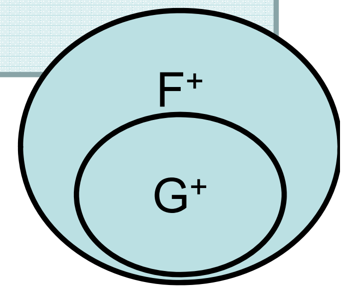
1) $\{Ssn\}^+$={Ssn, Ename}
2) $\{Pnumber\}^+$ = {Pnumber, Pname, Plocation}
3) $\{Ssn, Pnumber\}^+$ = {Ssn, Pnumber, Ename, Pname, Plocation, Hours}

➔ Το {Ssn, Pnumber} είναι **candidate key**!

Ορισμοί Συναρτησιακών Εξαρτήσεων (**Ισοδυναμία Συνόλου FDs $F^+=G^+$**)

- **Κάλυψη FDs (Cover):** Ένα σύνολο FD **F**, καλύπτει ένα άλλο σύνολο **G** εάν $\mathbf{G^+} \subseteq \mathbf{F^+}$
- Εναλλακτικά, το **F** καλύπτει το **G** εάν:
  - Κάθε FD του **G** μπορεί να συμπεραθεί από το **F**.
  - π.χ., $\{SSN\}^+$={SSN, NumGrade, LetterGrade}

    Το FD SSN→LetterGrade καλύπτεται από το SSN→**all**



- **Ισοδυναμία FDs (Equivalence):** Δυο σύνολα FDs **F** και **G** είναι ισοδύναμα εάν **το $F^+=G^+$**
- Εναλλακτικά, τα **F** και **G** είναι **ισοδύναμα** εάν:
  - **ΚΆΘΕ** FD του **F** μπορεί να **συμπεραθεί** από το **G** και
  - **ΚΆΘΕ** FD του **G** μπορεί να **συμπεραθεί** από το **F**
- Συνεπώς, τα **F** και **G** είναι **ισοδύναμα** εάν:
  - Το **F καλύπτει** το **G** και το **G καλύπτει** το F.

Παράδειγμα Κάλυψης

Σας δίνεται το σύνολο Συναρτησιακών Εξαρτήσεων F.
Βρείτε εάν τα *AB → E* και *D→ C* *καλύπτονται από το* F

F: $A \rightarrow D$
$AB \rightarrow C$
$D \rightarrow E$
$AC \rightarrow B$

X	X^+
A	$\{A, D, E\}$
AB	$\{A, B, C, D, E\}$ (Επομένως *AB* είναι κλειδί)
B	$\{B\}$
D	$\{D, E\}$

Καλύπτεται το ***AB → E*** από το ***F***;
ΝΑΙ, επειδή το E $\in \{AB\}^+$.
Καλύπτεται το ***D→ C*** από το ***F***;
ΟΧΙ, επειδή το C $\notin D^+$.

Συμπέρασμα: Το X^+ μας επιτρέπει να βρίσκουμε εάν η συναρτησιακή εξάρτηση της μορφής $X \rightarrow Y$ καλύπτεται από το σύνολο FDs ***F***.

Ορισμοί Συναρτησιακών Εξαρτήσεων (Απλό Παράδειγμα Ισοδυναμίας)

Αποδείξτε ότι τα σύνολα FDs F και G είναι ισοδύναμα

F= { SSN → Ename, Pnumber → {Pname, Plocation}, {Ssn, Pnumber} → Hours }

G= { SSN → Ename, Pnumber → {Pname, Plocation}, {Ssn, Pnumber} → Ename,Pname, Plocation, Hours }

Πρέπει να αποδείξουμε τις ακόλουθες δυο περιπτώσεις:

a) Κάθε FD του G καλύπτεται από το F (δηλ., $G^+ \subseteq F^+$)

Τα πρώτα δυο FDs των συνόλων είναι τα ίδια. Για το τρίτο FD , υπολογίζουμε το **{Ssn, Pnumber}+** (στο F) το οποίο είναι **{Ssn, Pnumber, Ename, Pname, Plocation, Hours}**

Το **{Ssn, Pnumber}+** (του F) **καλύπτει** τον τρίτο κανόνα του **G** εφόσον περιέχει όλα τα γνωρίσματα στο δεξί του μέλος (δηλ., **Ename, Pname, Plocation, Hours**)

β) Κάθε FD του F καλύπτεται από το G (δηλ., $F^+ \subseteq G^+$)

Αντίστοιχα με το (a) βρίσκουμε ότι ο τρίτος κανόνας του **F** καλύπτεται από το $\{Ssn, Pnumber\}^+$ του **G**.

Εφόσον το G καλύπτει το F και αντίστροφα, τα FDs είναι ισοδύναμα.

Ορισμοί Συναρτησιακών Εξαρτήσεων (**Ελάχιστη Κάλυψη FDs F_{min}**)

- Η **Ελάχιστη Κάλυψη F_{min} (Minimal Cover)** ενός συνόλου εξαρτήσεων **F**, είναι iii) ένας **Ελάχιστος αριθμός FDs**, i) σε **Κανονική Μορφή**, και ii) **Απλουστευμένη Μορφή**

I. **Κανονική Μορφή :** Κάθε εξάρτηση $\mathbf{X \rightarrow \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}}$ μετατρέπεται με IR4 (διάσπαση) σε $\mathbf{X \rightarrow A_1, X \rightarrow A_2, \ldots, X \rightarrow A_n}$
   - *π.χ., SSN→{Name, Age}* ***σε*** *SSN→Name και SSN→Age.*

II. **Απλουστευμένη Μορφή:** Το αριστερό μέλος κάθε δυνατής εξάρτησης $\mathbf{\{B_1, B_2, \ldots B_n\} \rightarrow X}$ μετατρέπεται σε απλούστερη μορφή, π.χ., $\mathbf{\{B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}\} \rightarrow X}$ **ισοδύναμη με την αρχική**
   - *π.χ., {SSN, Name}→Age* ***σε*** *SSN→Age*

III. **Ελάχιστος Αριθμός:** Οι περιττές εξαρτήσεις εξαλείφονται. Δηλαδή η X→A εξαλείφεται εάν $\mathbf{\{F - \{X \rightarrow A\}\}^+ = F^+}$

- Ο Αλγόριθμος 10.2 (Minimal Cover) στο βιβλίο, εφαρμόζει τα πιο πάνω τρία βήματα σε ένα σύνολο **F** για προσδιορισμό του $\mathbf{F_{min}}$

Ελάχιστη Κάλυψη FDs (Παράδειγμα)

- **Παράδειγμα:** Βρείτε την ελάχιστη κάλυψη του συνόλου Συναρτησιακών Εξαρτήσεων E : $\{B \rightarrow A, D \rightarrow A, AB \rightarrow D\}$;
- **Λύση**
  - **Βήμα Ι (Κανονική Μορφή):** Όλες οι FD είναι ήδη σε κανονική μορφή $\mathbf{X \rightarrow A_1, X \rightarrow A_2, \ldots, X \rightarrow A_n}$ άρα δεν κάνουμε κάτι επιπλέον.
  - **Βήμα ΙΙ (Απλουστευμένη Μορφή):** Η μόνη FD που έχει πάνω από 1 γνώρισμα στο αριστερό μέλος είναι η **AB→D.** Επομένως πρέπει να δείξουμε ότι το **E** είναι ισοδύναμο **είτε** με το E': $\{B \rightarrow A, D \rightarrow A,$ **B→D**$\}$ **ή** E'': $\{B \rightarrow A, D \rightarrow A,$ **A→D}.** Εμείς θα δείξουμε ότι **E=E'.**
    1. Μπορεί από το **B→D** να προκύψει το **AB→D (το καλύπτει);**

       ➔ Αυτό ισχύει τετριμμένα λόγω της IR2 (επαυξητικής)
    2. Μπορεί από το **AB→D** να προκύψει το **B→D (το καλύπτει);**

       ➔ Με βάση το E=$\{B \rightarrow A, D \rightarrow A, AB \rightarrow D\}$, προκύπτει ότι $B^+=\{B, A, D\}$ το οποίο σημαίνει ότι το **B→D** καλύπτεται από το B^+ και κατ' επέκταση από το E.

Ελάχιστη Κάλυψη FDs
(Παράδειγμα)

- **Λύση (συνέχεια)**
  - **Βήμα ΙΙ:** E’: {*B*→*A*, *D*→*A*, B→D}
  - **Βήμα ΙΙΙ (Ελάχιστος Αριθμός):**

    Τώρα θα επιχειρήσουμε να βρούμε τις **περιττές (redundant)** FDs (αυτές που μπορούν να φύγουν χωρίς να αλλάξει η κλειστότητα E’$^{+}$)

    Α) Διαγραφή του B→A από το E’: *Το* ***B→A*** *μπορεί να εξαχθεί από τα* **B→D** και ***D→A*** (μέσω μεταβατικής) *συνεπώς είναι περιττό.*

➔ **Ενδιάμεσο Αποτέλεσμα: E’: {*D*→*A*, B→D}**

Β) Διαγραφή του D→A από το E’: *Το* ***D→A*** *δεν μπορεί να εξαχθεί από το* **B→D**, *άρα δεν μπορεί να διαγραφεί*

Γ) Διαγραφή του B→D από το E’ : *Το* ***B→D*** *δεν μπορεί να εξαχθεί από το* **D→A**, *άρα δεν μπορεί να διαγραφεί*

Επομένως η ελάχιστη κάλυψη του Ε είναι {D→A, B→D}

Ορισμοί Συναρτησιακών Εξαρτήσεων (**Ελάχιστο Σύνολο FDs**)

- Κάθε σύνολο από FDs έχει **ένα** ή **περισσότερα ελάχιστα σύνολα** (ανάλογα με ποια σειρά επιλέγουμε να κάνουμε την εκτέλεση)
  - **Π.χ., F_{MIN}(E'): {*D*→*A*, B→D} και F_{MIN}(E''): {*B* → *A*, *D* → *A*, A→D}** στο προηγούμενο παράδειγμα.
- Σημειώστε, ότι τα σύνολα αυτά έχουν **διαφορετικό μέγεθος** λόγω της **διαφορετικής σειράς** απλοποίησης που χρησιμοποιήθηκε.
- Επομένως, ένα σύνολο **ονομάζεται Ελάχιστο** ΟΧΙ επειδή περιέχει τον **μικρότερο αριθμό** από FDs αλλά επειδή **ΔΕΝ** μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω.