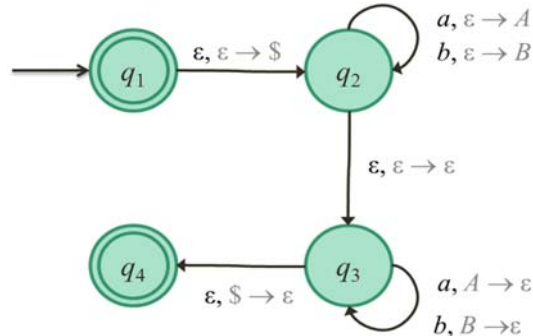


## Φροντιστήριο 7, 06/03/19

### Άσκηση 1

Θεωρήστε το πιο κάτω αυτόματο στοίβας:



- (α) Να εξηγήσετε με λόγια ποια γλώσσα αναγνωρίζεται από το αυτόματο.
- (β) Να δώσετε τον τυπικό ορισμό του αυτομάτου.
- (γ) Να δείξετε όλα τα μονοπάτια που αντιστοιχούν στην ανάγνωση των λέξεων  $aab$ ,  $aabb$ .
- (δ) Να δείξετε ότι οι λέξεις  $aaaa$  και  $baab$  ανήκουν στη γλώσσα του αυτομάτου.

### Άσκηση 2

Να κατασκευάσετε αυτόματα στοίβας που να αναγνωρίζουν τις πιο κάτω γλώσσες.

- (α)  $\{0^n 1^{2n} \mid n > 0\}$
- (β)  $\{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ και } i + j = k\}$

### Άσκηση 3

Για κάθε μια από τις πιο κάτω γραμματικές να κατασκευάσετε ένα ισοδύναμο αυτόματο στοίβας.

- (α)  $E \rightarrow E + T \mid T$   
 $T \rightarrow T \times F \mid F$   
 $F \rightarrow (E) \mid a$
- (β)  $S \rightarrow 1A1 \mid 0A0 \mid 1 \mid 0$   
 $A \rightarrow 1A \mid 0A \mid \epsilon$

### Άσκηση 4

Να δείξετε ότι οι πιο κάτω γλώσσες δεν είναι ασυμφραστικές αιτιολογώντας με ακρίβεια τις απαντήσεις σας.

- (α)  $\{a^n \# a^{2n} \# a^{3n} \mid n > 0\}$
- (β)  $\{a^i b^j c^k \mid k = \max(i, j)\}$

## Σύνοψη: Αυτόματα Στοιβάς (PDA)

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Αυτόματο στοιβάς είναι μια εξάδα  $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ , όπου

1.  $Q$  είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται καταστάσεις,
2.  $\Sigma$  είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, που ονομάζεται αλφάβητο,
3.  $\Gamma$  είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, που ονομάζεται αλφάβητο στοιβάς
4.  $\delta: Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$ , είναι η συνάρτηση μεταβάσεων,
5.  $q_0 \in Q$  είναι η εναρκτήρια κατάσταση,
6.  $F \subseteq Q$  είναι το σύνολο των καταστάσεων αποδοχής.

### ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

- Το αυτόματο στοιβάς  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$  αποδέχεται μια λέξη  $w$  αν αυτή μπορεί να γραφτεί στη μορφή  $w = w_1 w_2 \dots w_m$  όπου κάθε  $w_i \in \Sigma_\varepsilon$ , και αν υπάρχει ακολουθία καταστάσεων  $r_0, r_1, \dots, r_m \in Q$  και ακολουθία λέξεων  $s_0, s_1, \dots, s_m \in \Gamma^*$  που να ικανοποιούν τις συνθήκες:
  - $r_0 = q_0$  και  $s_0 = \varepsilon$
  - Για κάθε  $i = 0, \dots, m-1$ ,  $(r_{i+1}, b) \in \delta(r_i, w_{i+1}, a)$ , όπου  $s_i = at$  και  $s_{i+1} = bt$  για κάποια  $a, b \in \Gamma_\varepsilon$  και  $t \in \Gamma^*$ , και
  - $r_m \in F$
- Το αυτόματο  $M$  αναγνωρίζει τη γλώσσα  $A$  αν:  
 $A = \{w \mid \text{το } M \text{ αποδέχεται την } w\}$

### ΛΗΜΜΑ

Αν μια γλώσσα είναι ασυμφραστική, τότε υπάρχει αυτόματο στοιβάς που την αναγνωρίζει.

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω γραμματική  $G$ . Το *ισοδύναμο αυτόματο στοιβάς*  $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{start}, \{q_{end}\})$  ορίζεται ως εξής:

$$Q = \{q_{start}, q_{loop}, q_{end}\} \cup E$$

- Όπου  $E$  είναι το σύνολο των καταστάσεων που απαιτούνται για τις αντικαταστάσεις των μεταβλητών με λέξεις
- Η συνάρτηση μεταβάσεων είναι η εξής:
  - $\delta(q_{start}, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q_{loop}, S\$)\}$
  - $\delta(q_{loop}, \varepsilon, A) = \{(q_{loop}, w) \mid \text{υπάρχει κανόνας } A \rightarrow w \text{ στη γραμματική}\}$
  - $\delta(q_{loop}, a, a) = \{(q_{loop}, \varepsilon)\}$
  - $\delta(q_{loop}, \varepsilon, \$) = \{(q_{end}, \varepsilon)\}$

### Λήμμα της Άντλησης

Για κάθε ασυμφραστική γλώσσα  $A$ , υπάρχει αριθμός  $p$  (το *μήκος άντλησης* αυτής) τέτοιος ώστε κάθε λέξη  $w$  της  $A$  με μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του  $p$  να μπορεί να χωριστεί σε πέντε τμήματα,  $w = uvxyz$ , που να ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

1. Για κάθε  $i \geq 0$ ,  $u^i v x^i y^i z^i \in A$ ,
2.  $|vy| > 0$ , και
3.  $|vxy| \leq p$ .