Φροντιστήριο 11, 17/04/19

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι η κλάση P είναι κλειστή ως προς τις πράξεις της ένωσης, της συναρμογής και του συμπληρώματος.

Άσκηση 2

Ένας γράφος ονομάζεται *k*-χρωματίσιμος αν είναι δυνατό να χρωματίσουμε τους κόμβους του με *k* διαφορετικά χρώματα έτσι ώστε κανένα ζεύγος από γειτονικούς κόμβους να μην έχει το ίδιο χρώμα.

(α) Να δείξετε ότι η πιο κάτω γλώσσα ανήκει στην κλάση NP.

$\{ \langle G, k \rangle \mid$ ο G είναι ένας *k*-χρωματίσιμος γράφος$\}$

(β) Να δείξετε ότι η πιο κάτω γλώσσα ανήκει στην κλάση P.

$\{ \langle G \rangle \mid$ ο G είναι ένας 2-χρωματίσιμος γράφος$\}$

Άσκηση 3

Έστω ότι το G αναπαριστά οποιοδήποτε μη κατευθυνόμενο γράφημα με θετικά βάρη. Θεωρήστε τις γλώσσες:

ΒΡΑΧΕΙΑ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ = $\{ \langle G,s,t,k \rangle \mid$ το G περιέχει απλή διαδρομή από τον κόμβο s προς τον κόμβο t βάρους το πολύ k$\}$

ΜΑΚΡΑ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ = $\{ \langle G,s,t,k \rangle \mid$ το G περιέχει απλή διαδρομή από τον κόμβο s προς τον κόμβο t βάρους τουλάχιστον k$\}$

(α) Να δείξετε ότι το πρόβλημα ΒΡΑΧΕΙΑ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ ανήκει στην κλάση P.

(β) Να δείξετε ότι το πρόβλημα ΜΑΚΡΑ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ ανήκει στην κλάση NP.

(γ) Να δείξετε ότι το πρόβλημα ΜΑΚΡΑ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ είναι NP-πλήρες.

Άσκηση 4

Έστω A ένα πρόβλημα που ανήκει στην κλάση NP. Σχολιάστε τις συνέπειες κάθε μιας από τις προτάσεις που ακολουθούν.

(α) Έχετε αποδείξει ένα θεώρημα σύμφωνα με το οποίο οποιοσδήποτε αλγόριθμος που λύνει το πρόβλημα A απαιτεί χρόνο $\Theta(2^n)$, όπου n το μέγεθος του προβλήματος.

(β) Έχετε κατασκευάσει ένα ντετερμινιστικό αλγόριθμο ο οποίος λύνει το πρόβλημα A σε πολυωνυμικό χρόνο.

(γ) Έχετε επιδείξει ότι το πρόβλημα SAT μπορεί να αναχθεί στο πρόβλημα A σε πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης.

(δ) Έχετε κατασκευάσει ένα ντετερμινιστικό αλγόριθμο ο οποίος λύνει το πρόβλημα A σε πολυωνυμικό χρόνο και έχετε δείξει ότι το πρόβλημα A είναι NP-πλήρες.

<u>Σύνοψη: Χρονική Πολυπλοκότητα</u>

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 1 (Κλάση P)</u>

Η κλάση γλωσσών P αποτελείται από τις γλώσσες που μπορούν να διαγνωστούν σε πολυωνυμικό χρόνο από κάποια ντετερμινιστική μηχανή Turing.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 2 (Επαληθευτής)</u>

Ονομάζουμε *επαληθευτή* μιας γλώσσας A οποιονδήποτε αλγόριθμο V τέτοιο ώστε

$$w \in A \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \text{ο } V \text{ αποδέχεται τη λέξη } \langle w,s \rangle$$

για κάποιο s.
Λέμε ότι ο *V έχει πολυωνυμικό χρόνο* αν ο χρόνος εκτέλεσης του είναι πολυωνυμικός ως προς το μήκος της λέξης w.
Μια γλώσσα ονομάζεται *πολυωνυμικά επαληθεύσιμη* αν υπάρχει για αυτήν επαληθευτής πολυωνυμικού χρόνου.

- Για να επαληθεύσει ότι μια λέξη w ανήκει στην γλώσσα A, ο επαληθευτής χρησιμοποιεί κάποια επιπλέον πληροφορία, την οποία αναπαριστά η λέξη s στον ορισμό.
- Η πληροφορία αυτή ονομάζεται *πιστοποιητικό,* ή *απόδειξη*, της συμμετοχής της w στην A.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 3 (Κλάση NP)</u>

Η *κλάση γλωσσών NP* αποτελείται από τις γλώσσες που επιδέχονται επαληθευτή πολυωνυμικού χρόνου.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>

Μια γλώσσα ανήκει στη κλάση NP *αν και μόνο αν* υπάρχει μηχανή Turing μη ντετερμινιστικού πολυωνυμικού χρόνου που να τη διαγιγνώσκει.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 4</u>

Μια γλώσσα B είναι *NP-πλήρης* αν ικανοποιεί τις πιο κάτω συνθήκες:

1. Η B ανήκει στην κλάση NP
2. Κάθε γλώσσα $A \in NP$ ανάγεται στη B σε πολυωνυμικό χρόνο.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>
Αν η γλώσσα B είναι NP-πλήρης, η γλώσσα $\Gamma \in NP$ και επιπλέον η B μπορεί να αναχθεί σε πολυωνυμικό χρόνο στη Γ, τότε η Γ είναι επίσης NP-πλήρης.

Παραδείγματα NP-πλήρων Γλωσσών:

- Η γλώσσα SAT (πόρισμα Θεωρήματος Cook-Levin)
- Η γλώσσα 3SAT
- Η γλώσσα ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΗ_ΔΙΑΔΡΟΜΗ
- ΚΛΙΚΑ