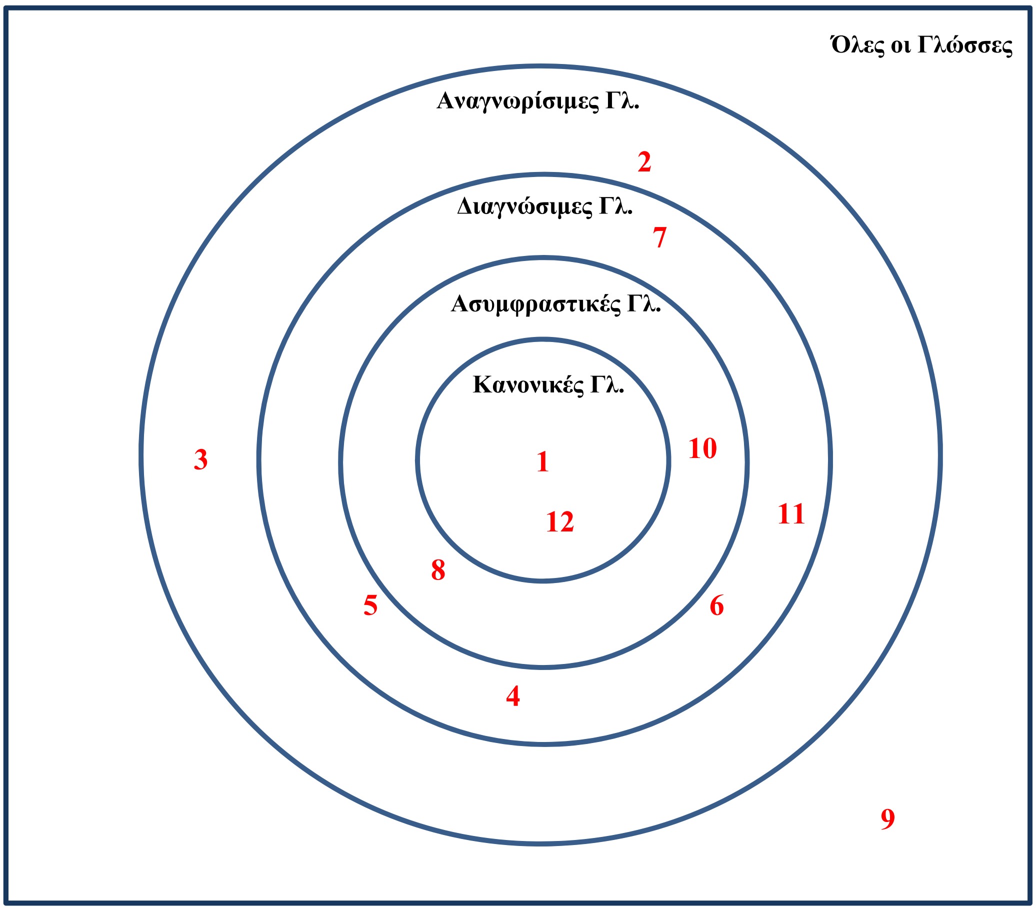
Σειρά Προβλημάτων 5 – Λύσεις

Άσκηση 1

Πιο κάτω υπάρχει ένα σχεδιάγραμμα που τοποθετεί τις κλάσεις των κανονικών, ασυμφραστικών, διαγνώσιμων και αναγνωρίσιμων γλωσσών μέσα στο σύνολο όλων των γλωσσών. Ακολουθούν 12 αριθμημένες γλώσσες. Να γράψετε τον αριθμό κάθε γλώσσας στην κλάση που ανήκει. Σαν παράδειγμα έχουν ήδη τοποθετηθεί στο διάγραμμα οι αριθμοί των δύο πρώτων γλωσσών: η γλώσσα με αριθμό 1 είναι κανονική ενώ η γλώσσα με αριθμό 2 είναι αναγνωρίσιμη (αλλά δεν είναι ούτε διαγνώσιμη, ούτε ασυμφραστική, ούτε κανονική).



1. Σ^*
2. A_{TM} (Το πρόβλημα της Αποδοχής σε Μηχανές Turing)
3. { ⟨M,k⟩ | το M είναι μια μηχανή Turing επί του αλφάβητου {0,1} η οποία απορρίπτει κάποια λέξη μήκους k }
4. { ⟨D,G⟩ | το D είναι ένα DFA και το G μια ασυμφραστική γραμματική όπου κάθε λέξη που αναγνωρίζεται από το D παράγεται από τη G}
5. { a^n | $n = k^2$ για κάποιο $k > 0$ }
6. 3-SAT
7. { ⟨M,k⟩ | το M είναι μια μηχανή Turing επί του αλφάβητου {0,1} η οποία απορρίπτει

κάποια λέξη μέσα στις k πρώτες κινήσεις της }

8. { w | w $\in$ {0,1}* και η w έχει περιττό μήκος και το μεσαίο της σύμβολο είναι 0 }

9. { $\langle M \rangle$ | η *M* είναι μια ΤΜ η οποία δεν αποδέχεται κάποια λέξη }

10. { wa^k | $w \in \{a,b\}^*$ και k > m όπου m το πλήθος των *a* που υπάρχουν στη λέξη w}

11. { $\langle D_1, D_2 \rangle$ | τα D_1 και D_2 είναι δύο DFA που παράγουν μια κοινή λέξη μήκους 100 }

12. { a^n | *n* mod 3 = 0 ή *n* mod 4 = 0 }

Άσκηση 2 [30 μονάδες]

Να δείξετε ότι οι πιο κάτω γλώσσες δεν είναι διαγνώσιμες.

(α) { $\langle$M,q$\rangle$ | η Μ είναι μια ΤΜ και q μια κατάσταση της Μ η οποία είναι αδρανής }

(β) { $\langle$M$\rangle$ | η Μ είναι μια ΤΜ η οποία περιέχει αδρανείς καταστάσεις }

[Σημείωση: *Αδρανής* κατάσταση μιας ΤΜ είναι μια κατάσταση στην οποία η μηχανή δεν μεταβαίνει ποτέ, όποια κι αν είναι η λέξη εισόδου.]

Λύση:

(α) Θέλουμε να δείξουμε ότι η γλώσσα

ΑδρανήςQ = {$\langle$M,q$\rangle$ | η Μ είναι μια ΤΜ και q μια κατάσταση της Μ η οποία είναι αδρανής}

είναι μη διαγνώσιμη. Για να το δείξουμε θα αναγάγουμε μια γνωστή μη διαγνώσιμη γλώσσα, την $\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}_{\text{ΤΜ}}$, στην υπό μελέτη γλώσσα ΑδρανήςQ.

Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η γλώσσα ΑδρανήςQ είναι διαγνώσιμη και η ΤΜ R είναι σε θέση να τη διαγνώσει. Με βάση τον διαγνώστη R θα κατασκευάσουμε ένα διαγνώστη S για το πρόβλημα $\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}_{\text{ΤΜ}}$. Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η ΑδρανήςQ είναι μια μη διαγνώσιμη γλώσσα.

Ο διαγνώστης S έχει ως εξής:

S = “Με είσοδο $\langle$M $\rangle$

1. Τρέξε την R με είσοδο $\langle$M,$q_{\text{αποδοχής}}\rangle$.
2. Αν η R αποδεχτεί ΑΠΟΔΕΞΟΥ.
3. Αν η R απορρίψει ΑΠΟΡΡΙΨΕ.

Εξετάζοντας την πιο πάνω μηχανή παρατηρούμε ότι αν η R αποδεχθεί την είσοδο $\langle$M,$q_{\text{αποδοχής}}\rangle$ τότε η κατάσταση αποδοχής της μηχανής Μ είναι αδρανής. Αυτό σημαίνει ότι δεν πρόκειται να μεταβεί ποτέ η Μ στην κατάσταση $q_{\text{αποδοχής}}$ σε κάθε δεδομένο εισόδου της, δηλαδή, δεν αποδέχεται καμιά λέξη. Αντιθέτως, αν η Μ αποδέχεται κάποια λέξη, τότε η κατάσταση $q_{\text{αποδοχής}}$ δεν είναι αδρανής και η R θα απορρίψει. Επομένως η S θα αποδεχθεί την $\langle$M,$q_{\text{αποδοχής}}\rangle$ αν και μόνο αν η Μ δεν αποδέχεται καμιά λέξη. Αυτό συνεπάγεται ότι ο S αποτελεί διαγνώστη για το πρόβλημα $\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}_{\text{ΤΜ}}$. Γνωρίζουμε όμως ότι το πρόβλημα είναι μη διαγνώσιμο, επομένως φτάνουμε σε αντίφαση.

Συμπέρασμα: Η γλώσσα ΑδρανήςQ είναι μη διαγνώσιμη.

(β) Θέλουμε να δείξουμε ότι η γλώσσα

$\text{Αδρανής}_{\text{ΤΜ}}$ = { $\langle$M$\rangle$ | η Μ είναι μια ΤΜ η οποία περιέχει αδρανείς καταστάσεις }

είναι μη διαγνώσιμη. Για να το δείξουμε θα αναγάγουμε μια γνωστή μη διαγνώσιμη γλώσσα, την $A_{\text{ΤΜ}}$, στην υπό μελέτη γλώσσα $\text{Αδρανής}_{\text{ΤΜ}}$.

Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η γλώσσα Αδρανής είναι διαγνώσιμη και η ΤΜ R είναι σε θέση να τη διαγνώσει. Με βάση τον διαγνώστη R θα κατασκευάσουμε ένα διαγνώστη S για το πρόβλημα A_{TM}. Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η Αδρανής$_{TM}$ είναι μια μη διαγνώσιμη γλώσσα.

Ο διαγνώστης S έχει ως εξής:

S = "Με είσοδο $\langle M,w \rangle$

1. Φτιάξε τη ΤΜ Μ' ως μια μηχανή η οποία επεκτείνει την Μ και λειτουργεί ως εξής:
   a. Αγνοεί το δεδομένου εισόδου της, περνά μια φορά από κάθε κατάσταση της Μ, επιστρέφει στην αρχική κατάσταση και τρέχει την Μ στη λέξη w. Αν η Μ οδηγηθεί στην τελική της κατάσταση τότε η Μ' προχωρεί στην κατάσταση q μια καινούρια τελική κατάσταση.
2. Τρέξε την R με είσοδο $\langle M' \rangle$.
3. Αν η R αποδεχτεί ΑΠΟΡΡΙΨΕ.
4. Αν η R απορρίψει ΑΠΟΔΕΞΟΥ.

Εξετάζοντας την πιο πάνω μηχανή παρατηρούμε ότι αν η R αποδεχθεί την είσοδο $\langle M' \rangle$ τότε η Μ' περιέχει κάποια αδρανή κατάσταση. Παρατηρούμε ότι η κατάσταση q της μηχανής Μ' είναι η μόνη κατάσταση της μηχανής η οποία μπορεί να είναι αδρανής αφού η Μ' ξεκινά διαπερνώντας μια-μια όλες τις καταστάσεις της Μ διασφαλίζοντας έτσι ότι δεν θα είναι αδρανείς. Αν όντως η q είναι αδρανής, αυτό σημαίνει ότι δεν πρόκειται να μεταβεί ποτέ η Μ' στην κατάσταση q και, από τον ορισμό της, αυτό συνεπάγεται ότι κατά την εκτέλεσή της στη λέξη w η Μ δεν θα μεταβεί στην κατάσταση αποδοχής. Επομένως η S θα αποδεχθεί την $\langle M' \rangle$ αν και μόνο αν η Μ αποδέχεται τη λέξη w. Αυτό συνεπάγεται ότι ο S αποτελεί διαγνώστη για το πρόβλημα A_{TM}. Γνωρίζουμε όμως ότι το πρόβλημα είναι μη διαγνώσιμο, επομένως φτάνουμε σε αντίφαση.

Συμπέρασμα: Η γλώσσα Αδρανής$_{TM}$ είναι μη διαγνώσιμη.

<u>Άσκηση 3 [20 μονάδες]</u>

Θεωρήστε το αλφάβητο Σ και δύο γλώσσες L_1 και L_2 επί του αλφάβητου Σ. Ορίζουμε ως $Merge_1(L_1, L_2)$ και $Merge_2(L_1, L_2)$ τις πιο κάτω γλώσσες επί του αλφάβητου Σ:

$$\mathbf{Merge_1(L_1, L_2) = \{ w \mid w = u_1v_1u_2v_2 \ldots u_nv_n \text{ όπου } u = u_1 \ldots u_n \in L_1 \text{ και } v = v_1 \ldots v_n \in L_2 \text{ και } u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in \Sigma\}}$$

$$\mathbf{Merge_2(L_1, L_2) = \{ w \mid w = u_1v_1u_2v_2 \ldots u_nv_n \text{ όπου } u = u_1 \ldots u_n \in L_1 \text{ και } v = v_1 \ldots v_n \in L_2 \text{ και } u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in \Sigma^*\}}$$

(α) Να αποδείξετε ότι η κλάση NP είναι κλειστή ως προς τις πράξεις $Merge_1$ και $Merge_2$.

(β) Ισχύει το ίδιο για την κλάση P; Αποδείξτε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

(α) Κλάση NP

<u>Κλειστότητα ως προς $Merge_1(L_1,L_2)$</u>

Για να δείξουμε ότι η κλάση NP είναι κλειστή ως προς την πράξη $Merge_1$ πρέπει να δείξουμε ότι αν L_1 και L_2 είναι δύο NP γλώσσες, τότε και η γλώσσα $Merge_1(L_1,L_2)$ ανήκει στην NP.

Ας υποθέσουμε ότι L_1, L_2 δύο NP γλώσσες και N_1, N_2 δύο ΤΜ που τις διαγιγνώσκουν σε μη ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο, αντίστοιχα.

Έστω λέξη w. Θα διαγνώσουμε κατά πόσο $w \in Merge_1(L_1,L_2)$ ως εξής:

N = ‘Για είσοδο $w = u_1v_1u_2v_2 \ldots u_nv_n$

1. Τρέχουμε τη λέξη $u_1u_2 \ldots u_n$στη μηχανή N_1. Αν η N_1 αποδεχθεί τότε προχωρούμε στο Βήμα 2, διαφορετικά απορρίπτουμε.
2. Τρέχουμε τη λέξη $v_1v_2 \ldots v_n$ στη μηχανή N_2. Αν η N_2 αποδεχθεί τότε αποδεχόμαστε, διαφορετικά, απορρίπτουμε.’

<u>Ορθότητα:</u> Σύμφωνα με τον ορισμό της πράξης $Merge_1(L_1,L_2)$, μια λέξη w ανήκει στο $Merge_1(L_1,L_2)$ αν αποτελεί τη συγχώνευση δύο λέξεων από τις γλώσσες L_1 και L_2. Πιο συγκεκριμένα, αν $w = u_1v_1u_2v_2 \ldots u_nv_n$ όπου $u = u_1 \ldots u_n \in L_1$, $v = v_1 \ldots v_n \in L_2$ και $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in \Sigma$. Η πιο πάνω μηχανή θεωρεί το συγκεκριμένο σπάσιμο στις λέξεις u και v, και τρέχει τη λέξη u στη μηχανή N_1, και τη λέξη v στη N_2. Η μηχανή αποδέχεται αν και μόνο αν αποδεχθούν αμφότερες οι N_1, N_2 που θα το πράξουν αν και μόνο αν $u \in L_1$ και $v \in L_2$.

<u>Χρόνος εκτέλεσης:</u> Αφού οι N_1, N_2 έχουν μη ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης η Ν έχει επίσης μη ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης και το ζητούμενο έπεται.

<u>Κλειστότητα ως προς $Merge_2(L_1,L_2)$</u>

Για να δείξουμε ότι η κλάση NP είναι κλειστή ως προς την πράξη $Merge_2$ πρέπει να δείξουμε ότι αν L_1 και L_2 είναι δύο NP γλώσσες, τότε και η γλώσσα $Merge_2(L_1,L_2)$ ανήκει στην NP.

Ας υποθέσουμε ότι L_1, L_2 δύο NP γλώσσες και N_1, N_2 δύο TM που τις διαγιγνώσκουν σε μη ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο, αντίστοιχα.

Έστω λέξη w. Θα διαγνώσουμε κατά πόσο $w \in Merge_2(L_1,L_2)$ ως εξής:

M = ‘Για είσοδο w

1. Επιλέγουμε μη ντετερμινιστικά ένα σπάσιμο της w σε υπολέξεις $u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n \in \Sigma^*$.
2. Για κάθε σπάσιμο δημιουργούμε τις λέξεις $w_1 = u_1 \ldots u_n$ και $w_2 = v_1 \ldots v_n$.
3. Τρέχουμε τη w_1 στη μηχανή N_1. Αν η N_1 αποδεχθεί τότε προχωρούμε στο Βήμα 4, διαφορετικά προχωρούμε στο επόμενο σπάσιμο.
4. Τρέχουμε τη w_2 στη μηχανή N_2. Αν η N_2 αποδεχθεί τότε αποδεχόμαστε, διαφορετικά προχωρούμε στο επόμενο σπάσιμο.
5. Αν τα σπασίματα εξαντληθούν απορρίπτουμε.’

<u>Ορθότητα:</u> Σύμφωνα με τον ορισμό της πράξης $Merge_2(L_1,L_2)$, μια λέξη w ανήκει στο $Merge_2(L_1,L_2)$ αν αποτελεί τη συγχώνευση ανάμεσα σε δύο λέξεις από τις γλώσσες L_1 και L_2. Πιο συγκεκριμένα, αν $w = u_1v_1u_2v_2 \ldots u_nv_n$ όπου $u = u_1 \ldots u_n \in L_1$, $v = v_1 \ldots v_n \in L_2$ και $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in \Sigma^*$. Η πιο πάνω μηχανή επιλέγει μη ντετερμινιστικά ένα δυνατό σπάσιμο σε λέξεις u και v, και τρέχει τη λέξη u στη μηχανή N_1, και τη λέξη v στη N_2. Η μηχανή αποδέχεται αν και μόνο αν αποδεχθούν αμφότερες οι N_1, N_2 που θα το πράξουν αν και μόνο αν $u \in L_1$ και $v \in L_2$.

<u>Χρόνος εκτέλεσης:</u> Αφού οι N_1, N_2 έχουν μη ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης η Ν έχει επίσης μη ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης και το ζητούμενο έπεται.

(β) Κλάση P

Κλειστότητα ως προς Merge$_1$(L$_1$,L$_2$)

Για να δείξουμε ότι η κλάση P είναι κλειστή ως προς την πράξη Merge$_1$ πρέπει να δείξουμε ότι αν L_1 και L_2 είναι δύο P γλώσσες, τότε και η γλώσσα Merge$_1$(L_1,L_2) ανήκει στην P.

Ας υποθέσουμε ότι L_1, L_2 δύο γλώσσες της κλάσης P και M_1, M_2 δύο TM που τις διαγιγνώσκουν σε πολυωνυμικό χρόνο, αντίστοιχα.

Έστω λέξη w. Θα διαγνώσουμε κατά πόσο $w \in$ Merge$_1$(L_1,L_2) ως εξής:

N = ‘Για είσοδο $w = u_1v_1u_2v_2 \dots u_nv_n$, $u_1,v_1, \dots, u_n, v_n \in \Sigma$

1. Τρέχουμε τη λέξη $u_1u_2 \dots u_n$ στη μηχανή M_1. Αν η M_1 αποδεχθεί τότε προχωρούμε στο Βήμα 2, διαφορετικά απορρίπτουμε.
2. Τρέχουμε τη λέξη $v_1v_2 \dots v_n$ στη μηχανή M_2. Αν η M_2 αποδεχθεί τότε αποδεχόμαστε, διαφορετικά, απορρίπτουμε.’

<u>Ορθότητα:</u> Η μηχανή λειτουργεί με τον ίδιο τρόπο όπως και η N στο σκέλος (α). Επομένως η ορθότητα προκύπτει από τα ίδια επιχειρήματα.

<u>Χρόνος εκτέλεσης:</u> Αφού η M_1, M_2 έχουν πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης η M έχει επίσης πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης και το ζητούμενο έπεται.

Κλειστότητα ως προς Merge$_2$(L$_1$,L$_2$)

Για να δείξουμε ότι η κλάση P είναι κλειστή ως προς την πράξη Merge$_2$ πρέπει να δείξουμε ότι αν L_1 και L_2 είναι δύο P γλώσσες, τότε και η γλώσσα Merge$_2$(L_1,L_2) ανήκει στην P.

Παρατηρούμε ότι αν εφαρμόσουμε την ιδέα όπως υλοποιήθηκε για την περίπτωση της κλάσης NP τότε ο αλγόριθμός μας δεν θα έχει πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης: το σύνολο των δυνατών σπασιμάτων δεν είναι πολυωνυμικό έτσι η σειριακή εκτέλεση και εξαντλητική αναζήτηση ανάμεσα σε όλα τα δυνατά σπασίματα θα οδηγήσει σε υπερ-πολυωνυμικό αλγόριθμο. Δεν είναι εμφανής μέθοδος η οποία να αποφεύγει την εξαντλητική αναζήτηση ανάμεσα σε όλα τα δυνατά σπασίματα, έτσι εικάζουμε ότι η κλάση P δεν είναι κλειστή ως προς την πράξη Merge$_2$(L_1,L_2).

Άσκηση 4 [30 μονάδες]

Η εταιρεία στην οποία εργάζεστε έχει δημιουργήσει ένα πρωτοποριακό ρομπότ για διεκπεραίωση δύσκολων χειρουργικών επεμβάσεων. Ως ειδική/ός στη χρήση του ρομπότ, έχετε κληθεί να διοργανώσετε ένα σεμινάριο εκπαίδευσης σε πιθανούς πελάτες/γιατρούς που προέρχονται από διάφορες κλινικές, νοσοκομεία ή/και άλλα ιατρικά κέντρα της Κύπρου. Επειδή ο αριθμός των διαθέσιμων ρομπότ για το σεμινάριο είναι περιορισμένος και ίσος με k, πρέπει να επιλέξετε προσεκτικά τους γιατρούς τους οποίους θα προσκαλέσετε στο σεμινάριο. Συγκεκριμένα, θεωρήστε ότι σας δίνεται ο αριθμός των ρομπότ, k, και ένα σύνολο της μορφής $\Sigma=\{(\gamma_1,\kappa_1),(\gamma_2,\kappa_2),\dots,(\gamma_n\, \kappa_n)\}$, όπου για κάθε γιατρό γ ο οποίος εργάζεται στο ιατρικό κέντρο κ, το σύνολο Σ περιέχει το ζεύγος (γ,κ). Σημειώστε ότι ένας γιατρός είναι δυνατό να συνεργάζεται με περισσότερα από ένα ιατρικά κέντρα, έτσι είναι δυνατό να ισχύει $(\gamma,\kappa), (\gamma,\kappa') \in \Sigma$, όπου $\kappa \neq \kappa'$. Καλείστε να επιλέξετε τους γιατρούς που θα προσκληθούν στο σεμινάριο έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα πιο κάτω κριτήρια:

1. **Ο αριθμός των γιατρών δεν θα πρέπει να ξεπερνά το k.**
2. **Για κάθε ιατρικό κέντρο, θα πρέπει να προσκληθεί τουλάχιστον ένας γιατρός που συνεργάζεται με αυτό.**

(α) Να δείξετε ότι το πρόβλημα ανήκει στην κλάση NP.

(β) Να δείξετε ότι το πρόβλημα είναι NP-πλήρες μέσω αναγωγής από γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα.

Λύση

(α) Ακολουθεί αλγόριθμος N που αποτελεί μη ντετερμινιστικό διαγνώστη πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα.

N := "Για είσοδο Σ={(γ_1,κ_1),(γ_2,κ_2),…,(γ_n κ_n)} και k ένας ακέραιος:

1. Επιλέγουμε μη ντετερμινιστικά ένα υποσύνολο Γ μεγέθους k από το σύνολο των γιατρών {γ_1,γ_2,…,γ_n}
2. Αν οι γιατροί που επιλέχθηκαν εκπροσωπούν όλα τα ιατρικά κέντρα τότε αποδεχόμαστε, διαφορετικά απορρίπτουμε."

Ο χρόνος εκτέλεσης του N είναι πολυωνυμικός ως προς το μέγεθος του Σ επομένως ο N αποτελεί μη ντετερμινιστικό διαγνώστη πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα.

Συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα ανήκει στην κλάση NP.

(β) Για να δείξουμε ότι το πρόβλημα είναι NP πλήρες αρκεί να δείξουμε ότι ένα γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα μπορεί να αναχθεί σε αυτό. Η αναγωγή θα γίνει από το πρόβλημα SAT. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι αν υπάρχει πολυωνυμική λύση για το πρόβλημα τότε υπάρχει πολυωνυμική λύση και για το πρόβλημα SAT.

Έστω ένας τύπος φ με k μεταβλητές $x_1,...,x_k$, του οποίου θέλουμε να αποφασίσουμε την αληθευσιμότητα. Γνωρίζουμε ότι ο τύπος αυτός μπορεί να μετατραπεί σε κανονική συζευκτική μορφή, έστω

$$\phi = \phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n$$

όπου κάθε ϕ_i αποτελεί τη διάζευξη όρων της μορφής x_i και $\neg x_i$. Παρατηρούμε ότι ο τύπος αυτός είναι αληθεύσιμος αν και μόνο αν ο πιο κάτω τύπος είναι αληθεύσιμος

$$\psi \equiv (x_1 \vee \neg x_1) \wedge ... \wedge (x_k \vee \neg x_k) \wedge \phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n$$

Αυτό ισχύει αφού κάθε ένας από τις φράσεις $x_i \vee \neg x_i$ είναι ισοδύναμος με True (δηλαδή, $(x_1 \vee \neg x_1) \wedge ... \wedge (x_k \vee \neg x_k) \wedge \phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n \equiv \text{True} \wedge ... \wedge \text{True} \wedge \phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n \equiv \phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n$.)

Θέλουμε να αποφασίσουμε κατά πόσο ο τύπος φ είναι αληθεύσιμος μέσω αναγωγής από το πρόβλημα της άσκησης. Για να το πετύχουμε, θα κατασκευάσουμε σύνολο Σ = {(γ_1,κ_1),(γ_2,κ_2),…,(γ_n κ_m)} τέτοιο ώστε να υπάρχει επιλογή k γιατρών που να ικανοποιεί τις προδιαγραφές του προβήματος της άσκησης αν και μόνο αν ο φ είναι ένας αληθεύσιμος τύπος (σημειώστε ότι k είναι ο αριθμός των μεταβλητών της φ).

Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι το σύνολο των γιατρών είναι οι το σύνολο $\{x_1,...,x_k,\neg x_1,..., \neg x_k\}$. Επίσης θεωρούμε ότι υπάρχουν n+k ιατρικά κέντρα που αντιστοιχούν στις n+k φράσεις της πρότασης ψ, έτσι ώστε

Στο ιατρικό κέντρο 1 ανήκουν οι γιατροί x_1 και $\neg x_1$

Στο ιατρικό κέντρο 2 ανήκουν οι γιατροί x_2 και $\neg x_2$

...

Στο ιατρικό κέντρο k ανήκουν οι γιατροί x_k και $\neg x_k$

Στο ιατρικό κέντρο k+1 ανήκουν οι γιατροί που αναφέρονται στο ϕ_1

Στο ιατρικό κέντρο k+2 ανήκουν οι γιατροί που αναφέρονται στο ϕ_2

...

Στο ιατρικό κέντρο k+n ανήκουν οι γιατροί που αναφέρονται στο ϕ_n

Ορθότητα: Παρατηρούμε ότι

Ο τύπος φ είναι αληθεύσιμος
αν και μόνο αν
υπάρχει ανάθεση λογικής τιμής στις μεταβλητές $x_1,\ldots,x_k$ που να κάνουν κάθε μια από τις φράσεις $\phi_1,\ldots,\phi_n$ αληθή
αν και μόνο αν
υπάρχει επιλογή k γιατρών από κάθε ένα από τα ιατρικά κέντρα*

*Σημειώστε ότι σε μια τιμοδοσία που κάνει την ψ αληθή, κάθε μεταβλητή x_i θα πάρει είτε την τιμή True είτε τη τιμή False. Αν x_i = True τότε θα επιλεχθεί ο γιατρός x_i διαφορετικά θα επιλεχθεί ο γιατρός $\neg x_i$ και αφού η τιμοδοσία κάνει την ψ αληθή, κάθε φράση έχει ένα λεξίγραμμα ως αληθές, που θα αντιστοιχεί στον γιατρό που θα επιλέξουμε από το αντίστοιχο ιατρικό κέντρο. Αντίστροφα, δεδομένης μιας επιλογής k γιατρών που να αντιπροσωπεύουν κάθε ένα από τα ιατρικά κέντρα θα περιέχει είτε την επιλογή του γιατρού x_i είτε του γιατρού $\neg x_i$ για κάθε i, διαφορετικά δεν θα εκπροσωπούνται τα ιατρικά κέντρα που αντιστοιχούν στις k πρώτες φράσεις. Επιπρόσθετα, η συγκεκριμένη επιλογή θα είναι τέτοια ώστε να εκπροσωπούνται τα ιατρικά κέντρα που αντιστοιχούν στις επόμενες n φράσεις. Συνεπώς, η τιμοδοσία που αντιστοιχεί στην επιλογή, κάνει τον τύπο αληθεύσιμο.

Συμπέρασμα: Αν το πρόβλημα της άσκησης επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο τότε και το πρόβλημα SAT επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Επομένως το πρόβλημα της άσκησης είναι NP-πλήρες.

<u>Άσκηση 5</u>

Να δείξετε ότι οι πιο κάτω γλώσσα είναι διαγνώσιμη.

{ ⟨M,w⟩ | η Μ είναι μια ΤΜ και η w μια λέξη έτσι ώστε η Μ εκτελούμενη στο w θα επιχειρήσει να κινήσει την κεφαλή της αριστερά σε κάποιο σημείο του υπολογισμού της}

<u>Λύση</u>

Παρατηρούμε ότι μια ΤΜ θα μετακινήσει την κεφαλή της αριστερά κατά την επεξεργασία κάποιας λέξης w αν και μόνο αν το κάνει αυτό μέσα στο πρώτα |w| + |Q| + 1 βήματα, όπου |Q| ο αριθμός των καταστάσεων της ΤΜ. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αν η μηχανή κινεί την κεφαλή της μόνο δεξιά, τότε μετά από τα πρώτα |w| βήματα θα έχει ολοκληρώσει την ανάγνωση της λέξης και θα βρίσκεται στο πρώτο σύμβολο διαστήματος (πρώτη κενή θέση μετά από τη w). Στη συνέχεια αν μέσα στο επόμενα |Q| + 1 βήματα δεν μετακινήσει την κεφαλή της προς τα δεξιά, σημαίνει ότι έχει εισέλθει σε ένα ατέρμονο βρόχο από τον οποίο απλά αλλάζει καταστάσεις καθώς προσπερνά κενές θέσεις της ταινίας και μετακινεί την κεφαλή της μηχανής προς τα δεξιά στην επόμενη κενή θέση. Αυτός ο βρόχος δυνατό να περιλαμβάνει μέχρι και όλες τις καταστάσεις της μηχανής.

Επομένως ο ζητούμενος αλγόριθμος διάγνωσης του προβλήματος έχει ως εξής:

S = ‘ Για είσοδο $\langle M,w \rangle$, όπου *M* μια ΤΜ και *w* μια λέξης:

1. Τρέξε την Μ για |w| + |Q| + 1 βήματα, όπου |Q| ο αριθμός των καταστάσεων της Μ.
2. Αν σε κάποιο από τα βήματα η Μ μετακινήσει την κεφαλή της αριστερά τότε αποδέξου, διαφορετικά απόρριψε.’