

## Σειρά Προβλημάτων 4

Ημερομηνία Παράδοσης: 03/04/19

### **Άσκηση 1 [24 μονάδες]**

(α) Να διατυπώσετε την τυπική περιγραφή μιας μηχανής Turing (αυθεντικός ορισμός) η οποία να διαγιγνώσκει τη γλώσσα

$$\{ w \mid w = (ab)^{2^m}b^m(ba)^m, m \geq 0 \}$$

(β) Να διατυπώσετε την τυπική περιγραφή μιας μηχανής Turing (αυθεντικός ορισμός) η οποία, με δεδομένο εισόδου μια λέξη της μορφής  $a^k b w$ ,  $w \in \{a,b\}^*$ , να εισάγει τον ειδικό χαρακτήρα # μετά από  $k$  χαρακτήρες της λέξης  $w$  και στη συνέχεια να διαγράψει το πρόθημα  $a^k b$ . Δηλαδή, με είσοδο μια λέξη της μορφής  $a^k b w_1 \dots w_n$  στο τέλος της εκτέλεσης της μηχανής να παραμείνει στην ταινία η λέξη  $w_1 \dots w_k \# w_{k+1} \dots w_n$ . Για παράδειγμα, με δεδομένο εισόδου τη λέξη  $aaabbaaaaaabba$  στο τέλος της εκτέλεσης της μηχανής να παραμείνει στην ταινία η λέξη  $baa\#aaabba$ . Σημειώστε ότι αν η λέξη εισόδου δεν έχει τη μορφή  $a^k b w$ , ή η λέξη  $w$  έχει μήκος μικρότερο από  $k$ , τότε η μηχανή σας θα πρέπει να απορρίπτει.

Και στις δύο πιο πάνω περιπτώσεις να παρουσιάσετε το αλφάβητο εισόδου και το αλφάβητο ταινίας της μηχανής σας, καθώς και το σύστημα μεταβάσεων της, γραφικά, και να εξηγήσετε σύντομα τη λειτουργία της.

### **Άσκηση 2 [20 μονάδες]**

Να παρουσιάσετε λεπτομερείς περιγραφές (i) μιας απλής μηχανής Turing και (ii) μιας πολυταινιακής μηχανής Turing οι οποίες να διαγιγνώσκουν τη γλώσσα

$$\{ www \mid w \in \{0,1\}^* \}$$

Να συγκρίνετε τις δύο μηχανές ως προς τη χρονική τους πολυπλοκότητα.

[ Υπόδειξη: Εκτός από την ταινία στην οποία θα είναι αποθηκευμένη η είσοδος, χρησιμοποιήστε ακόμα τρεις ταινίες για διαχωρισμό της λέξης εισόδου σε τρία ίσα τμήματα (ή να προσδιορίζει ότι αυτό δεν είναι δυνατό). ]

### **Άσκηση 3 [24 μονάδες]**

Δώστε αφ' υψηλού περιγραφές μηχανών Turing που να διαγιγνώσκουν τις ακόλουθες γλώσσες. Σε περίπτωση που θα χρησιμοποιήσετε μηχανές από τις διαλέξεις να τις περιγράψετε.

(α)  $\{ \langle M, k \rangle \mid \text{το } M \text{ είναι μια μηχανή Turing επί του αλφάβητου } \{0,1\} \text{ η οποία αποδέχεται κάποια λέξη μέσα στις } k \text{ πρώτες κινήσεις της} \}$

(β)  $\{ \langle R, G \rangle \mid \text{το } R \text{ είναι μια κανονική έκφραση και το } G \text{ μια ασυμφραστική γραμματική που δεν αποδέχονται καμιά κοινή λέξη} \}$

(γ)  $\{ \langle D \rangle \mid \text{το } D \text{ είναι ένα DFA επί του αλφάβητου } \{0,1\} \text{ με } k \text{ καταστάσεις το οποίο αποδέχεται κάποια λέξη με } k^2 \text{ εμφανίσεις του συμβόλου } 0 \}$

### **Άσκηση 4 [16 μονάδες]**

Ορίζουμε ως 2-3TM μια μηχανή Turing  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$  η οποία ορίζεται με παρόμοιο τρόπο με μια συνήθη TM με τη διαφορά ότι σε κάθε κίνηση  $\Delta$  η κεφαλή της ταινίας μετακινείται κατά δύο θέσεις προς τα δεξιά, και σε κάθε κίνηση  $A$  η κεφαλή της ταινίας μετακινείται κατά τρεις θέσεις προς τα αριστερά.

(α) Να δείξετε ότι αυτή η παραλλαγή των TM είναι ισοδύναμη με την αυθεντική TM. (Να δώσετε σαφείς εξηγήσεις της ισοδυναμίας παρουσιάζοντας τις καταστάσεις/μεταβάσεις της TM που προσομοιώνει την 2-3TM.)

(β) Θεωρήστε τη γενίκευση των 2-3TM σε  $k$ - $m$ TM, όπου το  $k$  αντιστοιχεί στον αριθμό θέσεων δεξιά κατά τις οποίες μετακινείται η κεφαλή της ταινίας σε κάθε  $\Delta$  κίνησή της, και  $m$  ο αριθμός θέσεων προς τα αριστερά κατά τις οποίες κινείται η κεφαλή της TM σε κάθε  $A$  κίνησή της. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν τα  $k$  και  $m$  για να είναι ισοδύναμη μια  $k$ - $m$ TM με την αυθεντική μηχανή Turing; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

### **Άσκηση 5 [16 μονάδες]**

Θεωρήστε το αλφάβητο  $\Sigma$  και τρεις διαγνώσιμες γλώσσες  $L_1$ ,  $L_2$  και  $L_3$  επί του αλφάβητου  $\Sigma$ .

(α) Να αποδείξετε ότι η γλώσσα  $L_1 L_2 - L_3$  είναι επίσης μια διαγνώσιμη γλώσσα.

(β) Ισχύει το ίδιο για την κλάση των αναγνωρίσιμων γλωσσών; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.