

Σειρά Προβλημάτων 2

Ημερομηνία Παράδοσης: 25/02/19

Άσκηση 1 [12 μονάδες]

Να δώσετε κανονικές εκφράσεις που να περιγράφουν τις πιο κάτω γλώσσες.

(α) $\{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}, m+n \text{ περιττός ακέραιος}\}$

(β) $\{w \in \{a,b\}^* \mid \text{τα πρώτα δύο σύμβολα της } w, \text{ αν υπάρχουν, δεν είναι τα ίδια με τα δύο τελευταία σύμβολα της } w\}$

[Επεξήγηση: Αν η λέξη ξεκινά με την υποσυμβολοσειρά xy τότε δεν μπορεί να τελειώνει σε xy .]

(γ) $\{w \mid \eta \ w \text{ είναι μια μη κενή λέξη επί του αλφάβητου } \{a,b\} \text{ η οποία περιέχει τουλάχιστον ένα } a \text{ σε κάθε πεντάδα συνεχόμενων στοιχείων μετά από το πρώτο } a, \text{ αν υπάρχει}\}$

(δ) $\{w \mid \eta \ w \text{ είναι λέξη επί του αλφάβητου } \{a,b\} \text{ η οποία περιέχει τη συμβολοσειρά } aba \text{ για άρτιο αριθμό φορών και δεν περιέχει τη συμβολοσειρά } abb\}$

Άσκηση 2 [34 μονάδες]

Θεωρήστε το μη ντετερμινιστικό αυτόματο $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ με

- σύνολο καταστάσεων το $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$,
- αλφάβητο το $\Sigma = \{a, b\}$,
- σύνολο τελικών καταστάσεων το $F = \{q_3\}$, και
- συνάρτηση μεταβάσεων δ όπως ορίζεται στον πίνακα που ακολουθεί:

δ	a	b	ϵ
q_0	$\{q_2\}$	$\{q_1\}$	$\{q_3\}$
q_1	\emptyset	\emptyset	$\{q_3\}$
q_2	$\{q_1, q_3\}$	\emptyset	\emptyset
q_3	\emptyset	\emptyset	$\{q_0\}$

(α) Να παρουσιάσετε το αυτόματο γραφικά μέσω ενός διαγράμματος μεταβάσεων.

(β) Να μετατρέψετε το αυτόματο από το σκέλος (α) σε ένα ισοδύναμο ντετερμινιστικό αυτόματο χρησιμοποιώντας τον σχετικό αλγόριθμο (Διαφάνειες 2-37 – 2-38).

(γ) Να μετατρέψετε το αυτόματο από το μέρος (β) στην ισοδύναμη κανονική έκφραση χρησιμοποιώντας τον σχετικό αλγόριθμο (Διαφάνεια 3-20).

Άσκηση 3 [32 μονάδες]

Να αποφασίσετε κατά πόσο οι πιο κάτω γλώσσες είναι κανονικές αιτιολογώντας με ακρίβεια τις απαντήσεις σας.

(α) $\{x\#y \mid x \in \{0,1\}^2, y \in \{0,1\}^* \text{ και η λέξη } x \text{ είναι υποσυμβολοσειρά της λέξης } y\}$

(β) $\{x\#y \mid x, y \in \{0,1\}^* \text{ και η λέξη } x \text{ είναι υποσυμβολοσειρά της λέξης } y\}$

(γ) $\{ x\#y \mid x, y \in \{0,1\}^* \text{ και η λέξη } y \text{ είναι υποσυμβολοσειρά της λέξης } x \}$

(δ) $\{ w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ και η } w \text{ έχει περιττό μήκος και το μεσαίο της σύμβολο είναι } 0 \}$

(ε) $\{ a^{4n^2+9} \mid n \geq 0 \}$

Άσκηση 4 [10 μονάδες]

Η Βίκυ και ο Μίκης έχουν βρει στην αποθήκη ένα παλιό NFA του παππού τους. Όμως είναι τόσο σκουριασμένο και περίπλοκο που δεν μπορούν να καταλάβουν ποια γλώσσα αποδέχεται. Παρόλα αυτά, ο Μίκης έχει αρκετές ιδέες πώς να το τροποποιήσει για να εκτελεί άλλες εργασίες:

Μίκης: Μπορώ εύκολα να το τροποποιήσω ώστε να αναγνωρίζει το συμπλήρωμα της γλώσσας που αναγνωρίζει τώρα! Αρκεί να ανταλλάξω τελικές και μη τελικές καταστάσεις: Όσες ήταν τελικές να τις κάνω μη τελικές και όσες ήταν μη τελικές να τις κάνω τελικές.

Βίκυ: Χμμ...

Μίκης: Εξίσου εύκολα μπορώ να το τροποποιήσω ώστε να αναγνωρίζει τη σώρευση της γλώσσας που αναγνωρίζει τώρα! Αρκεί σε κάθε τελική κατάσταση να προσθέσω μια ε-μετάβαση προς την αρχική και μετά να συμπεριλάβω την αρχική στις τελικές.

Βίκυ: Χμμ...

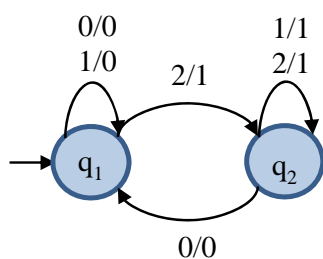
Αν και η Βίκυ είναι απλά δύσπιστη, εσείς είστε σίγουροι ότι καμιά από τις δύο τροποποιήσεις του Μίκη δεν λειτουργεί. Εξηγήστε γιατί:

(α) Δώστε αντιπαράδειγμα NFA N για το οποίο το αυτόματο N' που παράγει η πρώτη τροποποίηση δεν αναγνωρίζει το συμπλήρωμα της $L(N)$. Αποδείξτε ότι το N είναι πράγματι αντιπαράδειγμα. Πως θα κατασκευάζατε εσείς ένα αυτόματο για το συμπλήρωμα της $L(N)$;

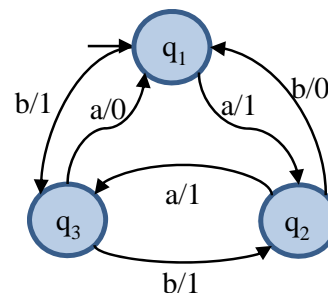
(β) Δώστε αντιπαράδειγμα NFA M για το οποίο το αυτόματο M' που παράγει η δεύτερη τροποποίηση δεν αναγνωρίζει τη σώρευση της $L(M)$. Αποδείξτε ότι το M είναι πράγματι αντιπαράδειγμα.

Άσκηση 5 [12 μονάδες]

Ένας πεπερασμένος μεταγραφέας καταστάσεων (για συντομία ΠΜΚ) είναι ένα είδος αιτιοκρατικού αυτομάτου που παράγει ως έξοδο όχι απλώς αποδοχή ή απόρριψη, αλλά μια ολόκληρη λέξη. Στο πιο κάτω σχήμα απεικονίζονται τα διαγράμματα δύο πεπερασμένων μεταγραφένων καταστάσεων Π_1 και Π_2 .



Π_1



Π_2

Κάθε μετάβαση ενός ΠΜΚ επιγράφεται με δύο σύμβολα, τα οποία χωρίζονται με μια κάθετο /: το πρώτο αντιπροσωπεύει το σύμβολο εισόδου για τη συγκεκριμένη μετάβαση και το δεύτερο το σύμβολο εξόδου. Για παράδειγμα, η μετάβαση από την q_1 στην q_2 στον μεταγραφέα P_1 έχει ως σύμβολο εισόδου το 2 και ως σύμβολο εξόδου το 1. Ορισμένες μεταβάσεις είναι δυνατό να έχουν περισσότερα από ένα ζεύγη εισόδου-εξόδου, π.χ. η μετάβαση στο P_1 από την q_1 στον εαυτό της. Όταν ένας ΠΜΚ υπολογίζει με είσοδο κάποια λέξη $w=w_1w_2\dots w_n$, λαμβάνει τα σύμβολα εισόδου ένα προς ένα και, με αφετηρία την εναρκτήρια κατάσταση, ακολουθεί τις μεταβάσεων των οποίων τα σύμβολα εισόδου συμπίπτουν με τα σύμβολα της εισόδου. Επιπλέον, κάθε φορά που εκτελεί μια μετάβαση, ο μεταγραφέας παράγει στην έξοδο το αντίστοιχο σύμβολο εξόδου. Για παράδειγμα, με είσοδο 2212011, ο P_1 διατρέχει την ακολουθία καταστάσεων $q_1, q_2, q_2, q_2, q_2, q_1, q_1, q_1$, και παράγει την έξοδο 1111000. Αντίστοιχα, με είσοδο abbb ο P_2 παράγει την έξοδο 1011.

(α) Για κάθε ένα από τα παρακάτω σκέλη, παραθέστε την ακολουθία των καταστάσεων που διατρέχει ο αναφερόμενος μεταγραφέας και την έξοδο που παράγει.

(i) P_1 , με είσοδο 01001

(iii) P_2 , με είσοδο bbabbaa

(ii) P_1 , με είσοδο 02020022

(iv) P_2 , με είσοδο bbbbbbaaa

(β) Σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων ενός ΠΜΚ με αλφάβητο εισόδου και εξόδου το $\{0,1\}$ το οποίο για κάθε λέξη εισόδου επιστρέφει ως έξοδο τη λέξη η οποία συμπίπτει με τη λέξη εισόδου στις άρτιες θέσεις και διαφέρει στις περιττές. Για παράδειγμα, με είσοδο τη λέξη 0010010 ο μεταγραφέας παράγει την έξοδο 1000111.