

## Ασκήσεις Επανάληψης – Μηχανές Turing

### Άσκηση 1

Θεωρήστε την μηχανή Turing  $M = ($

$\{1, 2, 3, 4, 5, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\},$   
 $\{0\},$   
 $\{0, \sqcup, x\},$   
 $\delta,$   
 $1,$   
 $q_{\text{accept}},$   
 $q_{\text{reject}}$   
 $)$

οι καταστάσεις  
το αλφάβητο εισόδου  
το αλφάβητο ταινίας  
συνάρτηση μεταβάσεων  
η αρχική κατάσταση  
η κατάσταση αποδοχής  
η κατάσταση απόρριψης

όπου η συνάρτηση μεταβάσεων δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

$\Delta$	Σύμβολο ταινίας		
Κατάσταση	0	x	$\sqcup$
1	2, $\sqcup$ , $\Delta$	$q_{\text{reject}}, x, \Delta$	$q_{\text{reject}}, \sqcup, \Delta$
2	3, x, $\Delta$	2, x, $\Delta$	$q_{\text{accept}}, \sqcup, \Delta$
3	4, 0, $\Delta$	3, x, $\Delta$	5, $\sqcup$ , A
4	3, x, $\Delta$	4, x, $\Delta$	$q_{\text{reject}}, \sqcup, \Delta$
5	5, 0, A	5, x, A	2, $\sqcup$ , $\Delta$

Να δείξετε την ακολουθία των φάσεων από τις οποίες διέρχεται η μηχανή με είσοδο την λέξη 00000.

Ποιες από τις λέξεις 00, 000, 0000, 00000, 00000000 θα γίνουν αποδεκτές από την  $M$ ;  
Ποια είναι η γλώσσα της  $M$ ;

### Άσκηση 2

Να διατυπώσετε τυπικές περιγραφές μηχανών Turing που να διαγιγνώσκουν κάθε μια από τις ακόλουθες γλώσσες

(α)  $\{(ab)^n \mid n \geq 0\}$

(β)  $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

(γ)  $\{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$

(δ)  $\{w \in \{0,1\}^* \mid \eta \ w \ \text{περιέχει} \ \text{άρτιο} \ \text{πλήθος} \ \text{από} \ 0\}$

### Άσκηση 3

Να παρουσιάσετε λεπτομερείς περιγραφές μηχανών Turing που να επιλύουν τα πιο κάτω προβλήματα. Θεωρήστε ότι το αλφάβητο εισόδου είναι το  $\{0,1\}$ .

(α) Μεταφορά της λέξης εισόδου μία θέση προς τα αριστερά κυκλικά μέσα στην ταινία. Δηλαδή, με δεδομένο εισόδου μια λέξη μήκους  $n$ , κάθε στοιχείο εκτός από το πρώτο να μεταφερθεί μια θέση αριστερά και το πρώτο στοιχείο να μεταφερθεί στη θέση  $n$  της ταινίας, π.χ. το δεδομένο εισόδου 0011101 να μετασχηματιστεί στο 0111010. Πόσα βήματα εκτελεί η μηχανή σας σε μια λέξη μήκους  $n$ ;

(β) Αντιστροφή της λέξης εισόδου μέσα στην ταινία. Για παράδειγμα, το δεδομένο εισόδου 0011101 να μετασχηματιστεί στο 1011100. Πόσα βήματα εκτελεί η μηχανή σας σε μια λέξη μήκους  $n$ ;

(γ) Αφαίρεση των 0. Δηλαδή, με δεδομένο εισόδου μια λέξη αφαιρεί όλα τα 0 και σπρώχνει τα 1 στην αρχή της ταινίας. Για παράδειγμα, το δεδομένο εισόδου 0011101 να μετασχηματιστεί στο 1111. Πόσα βήματα εκτελεί η μηχανή σας σε μια λέξη μήκους  $n$ ;

#### **Άσκηση 4**

Θεωρήστε τη γλώσσα  $\{ w \mid w \in \{a, b\}^*, w = w^R \}$ . Να παρουσιάσετε λεπτομερείς περιγραφές (i) μιας απλής μηχανή Turing και (ii) μιας μηχανής Turing με 2 ταινίες που να διαγιγνώσκουν τη γλώσσα και να συγκρίνετε τις δύο μηχανές ως προς τη χρονική τους πολυπλοκότητα.

#### **Άσκηση 5**

Μια μηχανή Turing αμφίπλευρα άπειρης ταινίας είναι παρόμοια με μια συνήθη TM με τη διαφορά ότι η ταινία της είναι άπειρη και προς τις δύο κατευθύνσεις. Αρχικά η ταινία περιέχει τη λέξη εισόδου και σύμβολα διαστήματος σε όλες τις υπόλοιπες θέσεις ενώ η κεφαλή της ταινίας βρίσκεται στο πρώτο σύμβολο της λέξης εισόδου. Ο υπολογισμός της μηχανής ορίζεται όπως και για τη συνήθη μηχανή με τη μόνη διαφορά ότι η κεφαλή δεν φτάνει ποτέ στο τέρμα της ταινίας κινούμενη προς τα αριστερά. Να δείξετε ότι αυτή η παραλλαγή των TM είναι ισοδύναμη με το απλό μοντέλο.

#### **Άσκηση 6**

Μια μηχανή Turing με δύο κεφαλές, 2HTM, είναι μια επτάδα  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$  η οποία ορίζεται με παρόμοιο τρόπο με μια συνήθη TM με τη διαφορά ότι αντί μίας έχει δύο κεφαλές και οι κινήσεις της εξαρτώνται από τα σύμβολα που δείχνονται από κάθε μια από τις κεφαλές αυτές. Συγκεκριμένα, η συνάρτηση μεταβάσεων  $\delta$  ορίζεται ως  $\delta: Q \times \Sigma^2 \rightarrow Q \times \Sigma^2 \times \{A, \Delta\}^2$ , όπου το

$$\delta(q, x, y) = (q', x', y', K_1, K_2)$$

ερμηνεύεται ως: αν η μηχανή βρίσκεται στην κατάσταση  $q$ , η πρώτη κεφαλή διαβάζει το σύμβολο  $x$  και η δεύτερη κεφαλή διαβάζει το σύμβολο  $y$ , τότε η μηχανή θα μεταβεί στην κατάσταση  $q'$  θα γράψει  $x'$  στην θέση της πρώτης κεφαλής,  $y'$  στη θέση της δεύτερης κεφαλής ενώ οι δύο κεφαλές θα κινηθούν στις κατευθύνσεις  $K_1$  και  $K_2$ , αντίστοιχα ( $K_1, K_2 \in \{A, \Delta\}$ ).

(α) Να δείξετε ότι αυτή η παραλλαγή των TM είναι ισοδύναμη με το απλό μοντέλο.

(β) Να προτείνετε παράδειγμα γλώσσας η οποία να διαγιγνώσκεται πιο αποδοτικά από μια 2HTM από ότι από μια απλή μηχανή Turing.